

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА

Математика

1. (а) Имамо да је d_1 растојање које се реализује по великом кругу те сфере. Једнако је четвртини његовог обима, тј. $d_1 = \frac{\pi}{2}$. Вредност d_2 рачунамо као трећину обима описаног круга око троугла

ABC , што је $d_2 = \frac{2\sqrt{6}\pi}{9}$. Дакле, $d_2 - d_1 = \frac{2\sqrt{6}\pi}{9} - \frac{\pi}{2}$ [4 поена]

- (б) Лако добијамо $\gamma = P - \alpha - \beta - \pi = \frac{\pi}{6}$. Сада, применом дуалне косинусне теореме (у свакој од

једначина је по једна непозната - дужина странице) добијамо $O = a+b+c = \arccos \frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{3}} + \arccos \frac{\sqrt{3}-2}{\sqrt{3}} +$

$\arccos \frac{2\sqrt{3}-1}{3}$ [5 поена]

2. (а) [4 поена] б) $\frac{1}{4}$; (б) [4 поена] б) $\frac{13}{25}$; (в) [1 поен] а) $\frac{13}{25}$.

3. Решење задатка 1:

а) $\text{Stab}(2) = \left\{ \begin{bmatrix} a & 2-2a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mid a \in \mathbb{R}, a \neq 0 \right\}$

б) $\text{Fix} \left(\begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) = \{1\}$

Решење задатка 2:

$$\frac{1}{5} (n^5 + 4n).$$

Решење задатка 3:

$$\frac{1}{16} (n^8 + 4n^5 + 5n^4 + 2n^2 + 4n).$$

4. (а) Подсетимо се да радимо са скаларним производом $(x_1, x_2, x_3) \circ (y_1, y_2, y_3) = 2x_1y_1 + 2x_2y_2 + 2x_3y_3 - x_1y_2 - x_2y_1 - x_2y_3 - x_3y_2$.

U скуп свих решења једначине $x - 2y + 3z = 0$ у скупу реалних бројева тј. свих тројки (x, y, z) таквих да вреди $x = 2y - 3z$ односно вреди:

$$U = \{(2\alpha - 3\beta, \alpha, \beta) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} = \{\alpha(2, 1, 0) + \beta(-3, 0, 1) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$$

Према теореме о ортогоналној пројекцији је $(0, 1, 4) = v = \bar{v} + v'$ где $\bar{v} \in U, v' \in U^\perp$ односно $\bar{v}$ се може записати као $\bar{v} = \alpha u_1 + \beta u_2$ где је $u_1 = (2, 1, 0), u_2 = (-3, 0, 1)$. Сада имамо $v = \alpha u_1 + \beta u_2 + v'$. Множећи ову једнакост редом скаларно са u_1 и u_2 имамо:

$$\langle v, u_1 \rangle = \langle u_1, u_1 \rangle + \langle u_2, u_1 \rangle + \langle v', u_1 \rangle$$

$$\langle v, u_2 \rangle = \langle u_1, u_2 \rangle + \langle u_2, u_2 \rangle + \langle v', u_2 \rangle$$

Због $u_1, u_2 \in U, v' \in U^\perp$ имамо да вреди $\langle v', u_1 \rangle = 0, \langle v', u_2 \rangle = 0$. Даље рачунамо:

$$\langle v, u_1 \rangle = \langle (0, 1, 4), (2, 1, 0) \rangle = 2 - 2 - 4 = -4$$

$$\langle u_1, u_1 \rangle = \langle (2, 1, 0), (2, 1, 0) \rangle = 8 + 2 - 2 - 2 = 6$$

$$\langle u_1, u_2 \rangle = \langle (2, 1, 0), (-3, 0, 1) \rangle = -12 + 3 - 1 = -10$$

$$\langle v, u_2 \rangle = \langle (0, 1, 4), (-3, 0, 1) \rangle = 8 + 3 - 1 = 10$$

$$\langle u_2, u_2 \rangle = \langle (-3, 0, 1), (-3, 0, 1) \rangle = 18 + 2 = 20$$

Сада имамо једнакости:

$$-4 = 6\alpha - 10\beta \implies -2 = 3\alpha - 5\beta$$

$$10 = -10\alpha + 20\beta \implies 1 = -\alpha + 2\beta$$

одакле је $\alpha = \beta = 1$ односно $\bar{v} = u_1 + u_2 = (2, 1, 0) + (-3, 0, 1) = (-1, 1, 1)$

Коначно је $d(v, U) = \|v - \bar{v}\| = \|(0, 1, 4) - (-1, 1, 1)\| = \|(1, 0, 3)\| = \sqrt{\langle (1, 0, 3), (1, 0, 3) \rangle} = \sqrt{20}$ [3 поена]

(б) Како одређени интеграл мери означену површину и како је $f(x) = \cos \frac{x}{2}$ парна функција на интервалу $[-\pi, \pi]$ то је функција $\cos \frac{x}{2} \sin nx$ непарна на интервалу $[-\pi, \pi]$ па вреди $b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx = 0$ за све $n \geq 1$. [0.5 поена]

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos \frac{x}{2} \, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cos \frac{x}{2} \, dx = \frac{4}{\pi} \sin \frac{x}{2} \Big|_0^{\pi} = \frac{4}{\pi}$$
 [0.5 поена]

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos \frac{x}{2} \cos nx \, dx = \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} \cos \left(n + \frac{1}{2}\right)x \, dx + \int_{-\pi}^{\pi} \cos \left(n - \frac{1}{2}\right)x \, dx \right) \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\frac{\sin \left(n + \frac{1}{2}\right)x}{n + \frac{1}{2}} \Big|_0^{\pi} + \frac{\sin \left(n - \frac{1}{2}\right)x}{n - \frac{1}{2}} \Big|_0^{\pi} \right) \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\frac{2}{2n+1} \sin \left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right) + \frac{2}{2n-1} \sin \left(n\pi - \frac{\pi}{2}\right) \right). \\ &= \frac{2}{\pi} \left(\frac{1}{2n+1} (-1)^n - \frac{1}{2n-1} (-1)^n \right) \\ &= (-1)^n \cdot \frac{2}{\pi} \cdot \left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n-1} \right) \\ &= \frac{(-1)^n \cdot (-4)}{(4n^2 - 1)\pi} \end{aligned}$$
 [2 поена]

(в) Функција $f(x) = \cos \frac{x}{2}$ је непрекидна и део по део монотона на интервалу $[-\pi, \pi]$, па за свако $x \in (-\pi, \pi)$ важи $f(x) = S(x)$ тј.

$$\cos \frac{x}{2} = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2 - 1} \cos nx$$

Уврштавајући $x = 0$ добијамо

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2 - 1} = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}.$$
 [3 поена]

5. **Подзатак 1** [2 поена]: Јасно је да d дефинисано са

$$d: Y \times Y \rightarrow \mathbb{R}, \quad d(x, y) = \begin{cases} \log \left(1 + \frac{1}{m(x, y)} \right), & x \neq y, \\ 0, & x = y \end{cases}.$$

задовољава прве две особине из дефиниције метрике тј. за све $x, y \in Y$ је $d(x, y) \geq 0$ због особина логаритамске функције, $d(x, y) = 0 \iff x = y$ и за све $x, y \in Y$ је $d(x, y) = d(y, x)$ тривијално на основу дефиниције d .

Остаје проверити да за све $x, y, z \in Y$ важи $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$. Нека је $x = (x_1, x_2, \dots)$, $y = (y_1, y_2, \dots)$, $z = (z_1, z_2, \dots)$. Ако су нека од ова три низа иста ова неједнакост је тривијално тачна. Претпоставимо надаље да су $x, y, z \in Y$ међусобно различити.

Нека је $m(x, z) = k$, $m(y, z) = l$ и нека је без губитка општости $k \leq l$. Тада су низови x и z исти на првих $k - 1$ места, а низови y исти на првих $l - 1$ места па је сигурно $m(x, y) \geq k$ јер одатле због k следи да су и низови x и y исти на првих $k - 1$ места. Одавде је $d(x, y) = \log \left(1 + \frac{1}{m(x, y)} \right) \leq \log \left(1 + \frac{1}{k} \right) = 1 + \log \left(\frac{1}{m(x, z)} \right) = d(x, z)$ јер је логаритамска функција растућа одакле следи тражена неједнакост.

Подзатак 2 [3 поена]: Тврдимо да низ $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ задат са

$$a_n = (\underbrace{1, 2, 3, \dots, n}_n, 0, 0, \dots)$$

конвергира у метричком простору (Y, d) конвергира ка низу природних бројева (назовимо га b) тј. низу $b_n = n$.

Формално, требамо показати да за свако $\varepsilon > 0$ постоји $n_0 \in \mathbb{N}$ тако да за свако $n \geq n_0$ важи $d(a_n, b) \leq \varepsilon$. Интуитивно видимо да нам је заиста довољно само одабрати n_0 да буде довољно велико да се сви преостали чланови низа a_n на довољно почетних места поклапају са низом природних бројева.

Приметимо да за свако $n \geq n_0$ важи $m(a_n, b) \geq n_0 + 1$ па је довољно узети n_0 такво да важи $\log(1 + \frac{1}{n_0+1}) \leq \varepsilon$.

Подзадатак 3 [4 поена]: Докажимо прво да метрика d није тополошки еквивалентна дискретној метрици одакле ће одмах следити да није ни метрички еквивалентна дискретној метрици јер ако су две метрике метрички еквивалентне онда морају бити и тополошки према наведеном једном од помоћних тврђења у поставци задатка (пробајте ово доказати за вежбу, није тешко).

Као што смо и констатовали у примеру код увођења појма отворених скупова у дискретној метрици су једночлани скупови отворени. Међутим, у нашој метрици d једночлани скупови нису отворени. Није тешко формално показати да за сваки низ $x \in Y$ и свако $\varepsilon > 0$ кугла $B(x, \varepsilon)$ садржи још неки елемент осим x одакле следи да није цела садржана у скупу $\{x\}$. Довољно је само да за фиксирано $\varepsilon > 0$ конструишемо низ $x' \neq x$ такав да је $0 < d(x, x') < \varepsilon$ односно да се x и x' поклапају на првих k места где је k довољно велико (конкретно желимо $\log(1 + \frac{1}{k+1}) < \varepsilon$), а да се разликују на $(k+1)$ -вом месту.

Подзадатак 4 [5 поена]: Метрички простор (Y, d) није повезан. Можемо га на више начина представити као унију два дисјунктна отворена скупа. Један од по нама најприроднијих је следећи...

Посматрајмо скупове Y_1 -скуп свих низова код којих је први члан једнак 1, Y_2 -скуп свих низова код којих је први члан различит од 1. Јасно је да су Y_1, Y_2 дисјунктни, оба непразни и да у унији дају цело Y . Остаје још доказати да су оба отворени.

Ако се два низа x, y разликују на првом члану тада је $m(x, y) = 1$ па је $d(x, y) = \log 2$. Дакле, за $\varepsilon < \log 2$ у $B(x, \varepsilon)$ се могу налазити само они низови који имају исти први члан као и низ x (наравно зависи од тога колико је тачно мало ε који од тих низова су унутар кугле). Одавде следи да за $x \in Y_1$ је $B(x, \varepsilon)$ за $\varepsilon < \log 2$ цела садржана у Y_1 јер се сви низови из Y_2 разликују од x на првом члану одакле закључујемо да је Y_1 отворен. Аналогно бисмо закључили и да је Y_2 отворен.

Информатика - А категорија

Редни број задатка	тачан одговор (одговори иду редом, прво под (а) па под (б) итд.)	Број поена
6.	в)	4
	в)	2.5
	б)	2.5
7.	б)	2
	а)	2
	в)	2
	б)	3
8.	1. $br = \min \text{BrojNovcica}(\text{novcici}, n - 1, s),$ 2. $br = \min(br, \min \text{BrojNovcica}(\text{novcici}, n, s - \text{novcici}[n - 1]) + 1)$ 1. $dp[j] = \min(dp[j], dp[j - \text{novcici}[i - 1]] + 1)$	4 + 5

9. (а) [4 поена]

`[a-zA-Z_] [a-zA-Z0-9_]*=( [a-zA-Z_] [a-zA-Z0-9_]* | [0-9]+ ) ( ( \+ | \* ) ( [a-zA-Z_] [a-zA-Z0-9_]* | [0-9]+ ) ) ? ;`

(б) [2 поена]

`\s*#include\s*((<[a-zA-Z]+\ .h>) | (" [a-zA-Z]+\ .h"))`

(в) [3 поена]

`//.*`

Напомена: Решења овог задатка нису јединствена.

10. (а) [7 поена] Пут: БГ, СМ, БИ, ДО, БА; редослед додавања: БГ, СА, ЛО, БИ, СМ, БИ, ДО.
 (б) [5 поена] Пут: БГ, СМ, БИ, ДО, БА; редослед додавања: БГ, СМ, СА, БИ, ЛО, НС, ДО, ТУ.
 (в) [2 поена] 0.

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА

Математика

1. (а) $[0, 4]$ [1 поен]
(б) $[-45, 45]$ [1 поен]

Сваки тачан квадратић по 0.375 поена

- (в) $f[A_1 \cup A_2] \subseteq f[A_1] \cup f[A_2]; \quad f[A_1 \cap A_2] \subseteq f[A_1] \cap f[A_2]; \quad A \subseteq f^{-1}[f[A]]; \quad B \supseteq f[f^{-1}[B]]$
(г) $f[A_1 \cup A_2] \subseteq f[A_1] \cup f[A_2]; \quad f[A_1 \cap A_2] \subseteq f[A_1] \cap f[A_2]; \quad A \subseteq f^{-1}[f[A]]; \quad B \supseteq f[f^{-1}[B]]$
(д) $f[A_1 \cup A_2] \subseteq f[A_1] \cup f[A_2]; \quad f[A_1 \cap A_2] \subseteq f[A_1] \cap f[A_2]; \quad A \subseteq f^{-1}[f[A]]; \quad B \subseteq f[f^{-1}[B]].$

2. (а) [2 поена + 2 поена] Приметимо да је

$$\det(B - \lambda I_n) = \begin{vmatrix} 13 - \lambda & 1 & -11 \\ 15 & 5 - \lambda & -17 \\ 6 & 1 & -4 - \lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 14\lambda^2 - 61\lambda + 84.$$

Изједначавањем претходне детерминанте са 0 добијамо $\lambda_1 = 7$, $\lambda_2 = 4$ и $\lambda_3 = 3$. Што се тиче сопствених

вектора, приказаћемо поступак само за $\lambda_2 = 4$, док за остале се рачуна аналогно. Нека је $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$.

Тада је

$$(B - 7I_n)v = \begin{pmatrix} 9 & 1 & -11 \\ 15 & 1 & -17 \\ 6 & 1 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9v_1 + v_2 - 11v_3 \\ 15v_1 + v_2 - 17v_3 \\ 6v_1 + v_2 - 8v_3 \end{pmatrix},$$

што треба да буде једнако матрици која има све нуле. Решавањем овог система добијамо $v_1 = t$, $v_2 = 2t$ и $v_3 = t$, за $t \in \mathbb{R}$. Један од вектора представника овог решења је $(1, 2, 1)$. Слично добијамо

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 13 \\ 21 \\ 9 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- (б) $\det(B) = 84$ (може да се рачуна као производ сопствених вредности или развојем описаним у тексту задатка) [2 поена]

- (в) [3 поена] Записивањем $B = PDP^{-1}$, добијамо $B^{2024} = \underbrace{PDP^{-1}}_{I_n} \underbrace{PDP^{-1}}_{I_n} \underbrace{PDP^{-1}}_{I_n} \dots \underbrace{PDP^{-1}}_{I_n} PDP^{-1} = PD^{2024}P^{-1}$. Степеновање матрице D се своди на степеновање бројева на главној дијагонали (пошто су све остале 0). Рачунањем инверза матрице P и множењем матрица P , D и P^{-1} добијамо

$$B^{2024} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 \cdot 3^{2024} - 12 \cdot 4^{2024} + 13 \cdot 7^{2024} & -4(3^{2024} - 4^{2024}) & 5 \cdot 3^{2024} + 8 \cdot 4^{2024} - 13 \cdot 7^{2024} \\ 3(3^{2024} - 8 \cdot 4^{2024} + 7 \cdot 7^{2024}) & -4(3^{2024} - 2 \cdot 4^{2024}) & 5 \cdot 3^{2024} + 16 \cdot 4^{2024} - 21 \cdot 7^{2024} \\ 3(3^{2024} - 4 \cdot 4^{2024} + 3 \cdot 7^{2024}) & -4(3^{2024} - 4^{2024}) & 5 \cdot 3^{2024} + 8 \cdot 4^{2024} - 9 \cdot 7^{2024} \end{pmatrix}.$$

3. (а) Имамо да је d_1 растојање које се реализује по великом кругу те сфере. Једнако је четвртини његовог обима, тј. $d_1 = \frac{\pi}{2}$. Вредност d_2 рачунамо као трећину обима описаног круга око троугла

ABC , што је $d_2 = \frac{2\sqrt{6}\pi}{9}$. Дакле, $d_2 - d_1 = \frac{2\sqrt{6}\pi}{9} - \frac{\pi}{2}$ [4 поена]

(б) Лако добијамо $\gamma = P - \alpha - \beta - \pi = \frac{\pi}{6}$. Сада, применом дуалне косинусне теореме (у свакој од једначина је по једна непозната - дужина странице) добијамо $O = a+b+c = \arccos \frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{3}} + \arccos \frac{\sqrt{3}-2}{\sqrt{3}} + \arccos \frac{2\sqrt{3}-1}{3}$ [5 поена]

4. Задатак 1: (а) [2 поена] в) не, никад; (б) [3 поена] б) Еквиваленција 2;

Задатак 2: (а) [2 поена] б) $\frac{7}{15}$; (б) [2 поена] г) $\frac{17}{50}$.

5. (а) Јасно, за $n \rightarrow \infty$ имамо $n + \frac{25}{n+2} \rightarrow \infty$, па $\max S$ не постоји, а важи $\sup S = +\infty$ [1.5 поен].
Приметимо, на пример, према АГ неједнакости (може и на друге начине, нпр. испитивањем случајева $n \leq 8$, а јасно је да за $n \geq 9$ важи $n + \frac{25}{n+2} > 9$) да важи

$$n + \frac{25}{n+2} = (n+2) + \frac{25}{n+2} - 2 \geq 2\sqrt{(n+2) \cdot \frac{25}{n+2}} - 2 = 8.$$

С друге стране, за $n = 3$ имамо $n + \frac{25}{n+2} = 8$, па је $\inf S = \min S = 8$ [2.5 поена].

(б) Приметимо да важи

$$\frac{n^2 + 2n + 25}{n+2} = n + \frac{25}{n+2} \quad \text{и} \quad \operatorname{tg} \left(\frac{\pi m + 1}{2m} \right) = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2m} \right).$$

Означимо

$$X = \left\{ \frac{n^2 + 2n + 25}{n+2} \mid n \in \mathbb{N} \right\} \quad \text{и} \quad Y = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi m + 1}{2m} \right).$$

Лако видимо да су сви чланови скупа X позитивни и сви чланови скупа Y негативни. Према томе, сви чланови скупа T су негативни, па важи $\sup T = \inf X \cdot \sup Y$. Како је $\frac{1}{2m}$ монотono опадајућа функција, $\frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2m} \leq \frac{\pi+2}{2} < \pi$ и функција tg монотono растућа функција на том интервалу, закључујемо

$$\sup Y = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi+1}{2} \right) \Rightarrow \sup T = 8 \operatorname{tg} \left(\frac{\pi+1}{2} \right) \quad [3 поена]$$

(в) Покушајмо да испитамо монотоност низа. Приметимо да је

$$a_{n+1} - a_n = \frac{a_n^2 + 6}{5} - a_n = \frac{a_n^2 - 5a_n + 6}{5} = \frac{(a_n - 2)(a_n - 3)}{5}.$$

Процењивањем вредности првих неколико чланова низа, лако видимо да важи $2 < a_n < 3$ (из неједнакости за a_1 , добијамо $2 < a_2 < 3$, па слично за a_3 итд.). Формално, индукцијом по n . База $n = 1$ је испуњена. Докажимо $n \rightarrow n+1$. Из $2 < a_n < 3$ следи $4 < a_n^2 < 9 \Rightarrow 10 < a_n^2 + 6 < 15 \Rightarrow 10 < 5a_{n+1} < 15 \Rightarrow 2 < a_{n+1} < 3$, чиме је индукција завршена.

Тиме смо доказали $2 < a_n < 3$ за свако $n \in \mathbb{N}$, па је низ ограничен. Такође, показали смо и $a_{n+1} - a_n < 0$. Сада, како је низ ограничен и монотono опадајући, добијамо да је конвергентан. Нека је $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$.

Проласком лимесом кроз рекурентну везу (то смо пошто обе стране конвергирају и јер су функције са обе стране непрекидне), добијамо

$$5L = L^2 + 6,$$

што као решења оставља $L_1 = 2$ и $L_2 = 3$. Међутим, како је $2 < a_n < 3$ и a_n опадајући, закључујемо $L = 2$ [7 поена].

Информатика - Б категорија

Редни број задатка	тачан одговор (одговори иду редом, прво под (а) па под (б) итд.)	Број поена
6.	в)	4
	а)	2.5
	а)	2.5
7.	б)	2
	а)	2
	г)	2
	в)	3
8.	б) 1. $br = \min \text{BrojNovcica}(\text{novcici}, n - 1, s)$, 2. $br = \min(br, \min \text{BrojNovcica}(\text{novcici}, n, s - \text{novcici}[n - 1]) + 1)$ в) 1. $dp[j] = \min(dp[j], dp[j - \text{novcici}[i - 1]] + 1)$	4 + 5

9. (а) [4 поена]

`[a-zA-Z_] [a-zA-Z0-9_]*`

(б) [2 поена]

`\s*#include\s*((<[a-zA-Z]+\.\h>)|("[a-zA-Z]+\.\h"))`

(в) [3 поена]

`//.*`

Напомена: Решења овог задатка нису јединствена.

10. (а) [8 поена] Пут: БГ, СМ, БИ, ДО, БА; редослед додавања: БГ, СА, ЛО, БИ, СМ, БИ, ДО.

(б) [6 поена] Пут: БГ, СМ, БИ, ДО, БА; редослед додавања: БГ, СМ, СА, БИ, ЛО, НС, ДО, ТУ.