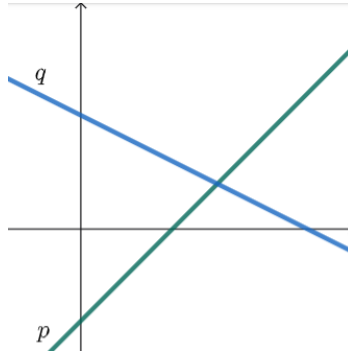


1 Задаци који вреде 2 бода

Тачан одговор носи 2 бода, нетачан одузима 0.5. Неодговорено – 0 бода.

1. Праве p и q на слици задате су једначинама $y = ax + b$ и $y = cx + d$, редом. У ком од понуђених одговора су **обе** релације између бројева a , b , c и d тачне?



- А) $c > 0$, $c < a$
- Б) $a < c$, $c < b$
- В) $b < c$, $a < 0$
- Г) $b < 0$, $d > b$ - тачан одговор

Решење: Са слике видимо да права p има позитиван коефицијент правца, а права q негативан, односно $a > 0$ и $c < 0$. Бројеве b и d добијамо као пресеке правих p и q редом са y -осом, па је $b < 0$ и $d > 0$. На основу овог закључујемо да је Г) једини одговор где су обе релације тачне.

2. Комплексних бројева z таквих да важи једнакост $z|z|^2 = 16\bar{z}$ има:

- А) 1
- Б) 2
- В) 3 - тачан одговор
- Г) 4

Решење. Познато је да важи $|z|^2 = z\bar{z}$, што уврштавањем у дату једнакост даје

$$z \cdot (z\bar{z}) = 16\bar{z} \implies z^2\bar{z} = 16\bar{z}.$$

Пребацивањем на једну страну остаје

$$\bar{z}(z^2 - 16) = 0 \implies \bar{z}(z - 4)(z + 4) = 0$$

Дакле, решења су $z \in \{0, 4, -4\}$.

3. Директор компаније је изјавио: „Сви запослени у нашој компанији имају најмање 30 година.” Касније се испоставило да то није тачно. То значи да:

- А) сви запослени у компанији имају више од 31 годину
- Б) нико од запослених у компанији још нема 30 година
- В) неко од запослених у компанији има мање од 30 година - тачан одговор
- Г) неко од запослених у компанији има тачно 31 годину

Решење. Тврдња директора гласи:

$$(\forall x) (x \text{ је запослен} \implies \text{године}(x) \geq 30).$$

Негација тог исказа јесте исказ:

$$(\exists x) (x \text{ је запослен} \wedge \text{године}(x) < 30).$$

4. Колико цифара има број који је резултат множења $(2^{22})^5 \cdot (5^{55})^2$?

- A) 22
- B) 77
- B) 110
- Г) 111 - тачан одговор

Решење. $(2^{22})^5 \cdot (5^{55})^2 = 2^{110} \cdot 5^{110} = (10)^{110}$ – ово је број који почиње бројем 1 и у наставку има 110 нула, што је укупно 111 цифара.

2 Задаци који вреде 3 бода

У наредним задацима треба уписати само коначно решење (број).

- Одредити максималну вредност израза $|2x^2 - 9x + 7|$ на интервалу $x \in [0, 3]$.

Решење. Посматрајмо функцију $f(x) = 2x^2 - 9x + 7$. Пошто је f квадратна функција са позитивним коефицијентом уз x^2 , она има минимум у тачки $x = -\frac{-9}{2 \cdot 2} = \frac{9}{4}$, која припада интервалу $[0, 3]$.

Израчунајмо вредности функције у темену и на крајевима интервала: $f(0) = 7$, $f(3) = 2 \cdot 9 - 27 + 7 = -2$, $f\left(\frac{9}{4}\right) = 2 \cdot \frac{81}{16} - 9 \cdot \frac{9}{4} + 7 = -\frac{25}{8}$.

Дакле, на интервалу $[0, 3]$ важи $\min f(x) = -\frac{25}{8}$ и $\max f(x) = 7$. Следи да је $\max_{x \in [0, 3]} |2x^2 - 9x + 7| = \max\left\{7, \frac{25}{8}\right\} = 7$.

- Колико износи збир свих вредности x за које важи једнакост

$$x + 2^x = 3x - 4 + 2^{3x-4} \quad ?$$

Прво решење. Приметимо да је једначина еквивалентна са $f(x) = f(3x - 4)$, где је $f(t) = t + 2^t$. Како је f строго растућа функција на $\mathbb{R}$ (као збир две растуће), то је она и инјективна. Дакле, мора да важи $x = 3x - 4$, тј. једино решење једначине је $x = 2$.

Друго решење. Приметимо да је једначина еквивалентна са

$$2^x = 2x - 4 + 2^{3x-4}.$$

Уочимо функцију $f(x) = 2^{3x-4} + 2x - 4 - 2^x$. Она је непрекидна на $\mathbb{R}$, а важи и

$$f'(x) = 3 \ln 2 \cdot 2^{3x-4} + 2 - \ln 2 \cdot 2^x = \ln 2 (3 \cdot 2^{3x-4} - 2^x) + 2 = \ln 2 \cdot 2^x (3 \cdot 2^{2x-4} - 1) + 2.$$

Имамо да је $\ln 2 > 0$ и $2^x > 0$ за све $x \in \mathbb{R}$. Размотримо два случаја:

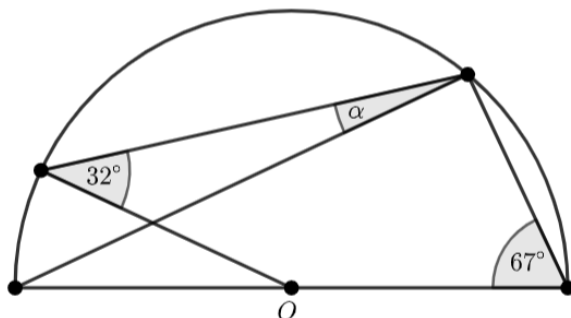
1° $x \geq \frac{3}{2}$. Тада је $3 \cdot 2^{2x-4} - 1 \geq 3 \cdot 2^{-1} - 1 = \frac{1}{2}$. Дакле, $f'(x) > 2 > 0$.

2° $x < \frac{3}{2}$. Докажимо да је $\ln 2 \cdot 2^x (3 \cdot 2^{2x-4} - 1) > -2$. Како је $3 \cdot 2^{2x-4} - 1 > -1$, довољно је доказати да је $\ln 2 \cdot 2^x < 2$, тј. $\ln 2 \cdot 2^{x-1} < 1$, а за то је довољно доказати $\ln 2 \cdot \sqrt{2} < 1$.

Познато је да је $\sqrt{2} \approx 1.41$, па је смислено користити оцену $\sqrt{2} < \frac{10}{7}$ (она је тачна јер је еквивалентна са $2 < \frac{100}{49}$, што јесте тачно). Слично, $\ln 2 < \frac{7}{10} \iff 2^{10} < e^7$, а ово се непосредно проверава да јесте тачно ($2^{10} = 1024 < 2.7^7 < e^7$). Дакле, $f'(x) > 0$.

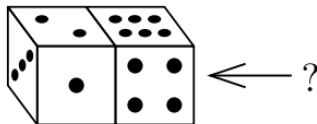
Дакле, f је строго растућа на $\mathbb{R}$, па може имати највише један пресек са x -осом. Како је $f(2) = 0$, то је $x = 2$ једино решење полазне једначине.

- На слици испод приказан је полукруг са центром у тачки O и дате су мере два угла (слика **није** прецизна). Колика је мера угла α , изражена у степенима?



Решење: Нека су означене тачке на полукругу редом A, B, C, D , у смеру супротном од смера казаљке на сату. Троугао $\triangle ABD$ је правоугли са правим углом у темену B , јер је AD пречник. Зато је $\angle ODB = \angle ADB = 90^\circ - \angle DAB = 23^\circ$. Како су троуглови $\triangle OBC$ и $\triangle OBD$ једнакокраки, имамо да је $32^\circ = \angle OCB = \angle OBC = \angle OBD + \angle DBC = \angle ODB + \alpha = 23^\circ + \alpha$, па је $\alpha = 9^\circ$.

4. За стандардну коцкицу важи да је збир бројева тачкица на супротним странама једнак 7. Две **идентичне** стандардне коцкице су приказане на слици. Колико тачкица може бити на (невидљивој) страни десно означеној знаком питања?

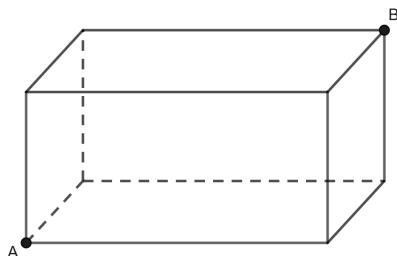


Решење: На основу коцкице лево, закључујемо да се на странама суседним страни на којој је број 1 редом налазе бројеви 2, 3, 5, 4 (у смеру супротном од смера казаљке на сату). Страна са бројем 1 је доња страна коцкице десно, што значи да се на страни означеној знаком питања налази број 5.

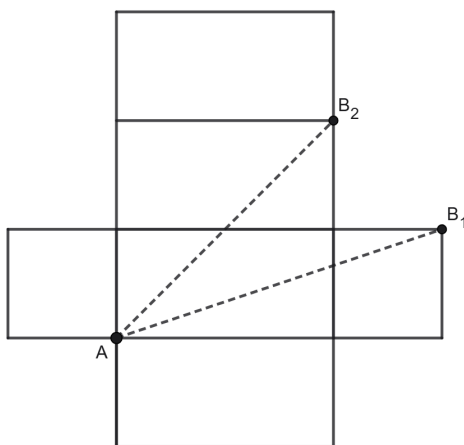
3 Задаци који вреде 5 бодова

Приказати (откуцати) поступак у наредним задацима.

1. Мрав се налази код темена A квадрата са слике и жели да дође до темена B . Ако су дужине ивица квадрата 2, 1 и 1, а мрав може да се креће по омотачу квадрата (дакле, не само по ивицама), колики је најкраћи пут који мрав мора да пређе? Одговор образложити!



Решење: Посматрамо мрежу квадрата са слике доле [1 бод]. Како мрав може да се креће само по омотачу квадрата, најкраћи пут од тачке A до тачке B је најкраћи пут од тачке са мреже која одговара тачки A (на мрежи је то само тачка означена са A) до тачке са мреже која одговара тачки B (на мрежи су то тачке означене са B_1 и B_2) [2 бода]. Дакле, потребно је само израчунати дужине дужи AB_1 и AB_2 . Из Питагорине теореме се добија $AB_1 = \sqrt{10}$ и $AB_2 = 2\sqrt{2}$ [1 бод], па је најкраћи пут који мрав мора да пређе једнак $2\sqrt{2}$ [1 бод].



2. Дато нам је 9 картица, на првој је написан број 1, на другој 2,..., на последњој 9. Особама које седе за округлим столом желимо поделити картице (сваком по једну) тако да су разлике бројева на картицама суседних особа међусобно различите (посматра се само апсолутна вредност разлике, тј. ако су нпр. особе са картицама 3 и 7 једна до друге, онда је разлика између њих 4, а не -4).

а) Да ли је то могуће ако је за столом 9 особа?

б) Да ли је то могуће ако је за столом 8 особа? Тада једну картицу (коју год желимо) задржимо за себе, а остале поделимо особама за столом.

Ако је одговор потврдан, довољно је дати један пример расподеле картица, а ако није, образложити зашто није.

Решење: а) Није могуће. Пошто је за столом 9 особа, потребно нам је 9 различитих разлика бројева.

Како су сви бројеви на картицама различити и налазе се у скупу $\{1, \dots, 9\}$, разлике бројева су све у скупу $\{1, \dots, 8\}$, па не може бити 9 различитих разлика. [2.5 бода]

б) Могуће је. Нека су особама редом додељене картице са бројевима 1, 6, 5, 7, 4, 8, 2, 9 (задржаћемо картицу са бројем 3). Тада су разлике редом 5, 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, па је услов задатка испуњен. [2.5 бода]

Коментар. Одговори без доказа, односно конструкције, вреде 0 бодова.

3. Одредити највећи природан број n такав да $n \mid p^6 - 1$ за све просте бројеве $p \geq 7$.

Решење. Приметимо да важи $p^6 - 1 = (p^2 - 1)(p^4 + p^2 + 1) = (p - 1)(p + 1)(p^4 + p^2 + 1)$. Овај израз није дељив са p , где је p прост број. Дакле, треба наћи највеће степене бројева 2, 3 и 5 који деле $p^6 - 1$ за сваки прост број $p \geq 7$ [1 бод].

Приметимо да $8 \mid (p - 1)(p + 1)$ за сваки прост број $p \geq 7$, а да је број $p^4 + p^2 + 1$ непаран. Такође, $16 \nmid (p - 1) \cdot (p + 1)$ нпр. за $p = 11$ [1.25 + 0.5 бодова].

Слично, $3 \mid (p^2 - 1)$ и $3 \mid (p^4 + p^2 + 1)$ за сваки прост број $p \geq 7$ (јер $p^2 \equiv 1 \pmod{3}$). Такође, нпр. за $p = 11$ имамо $9 \nmid (11^2 - 1)$, као и $11^4 + 11^2 + 1 \equiv 2^4 + 2^2 + 1 \equiv 21 \pmod{9}$. Дакле, 3^2 је највећи степен тројке који дели $p^6 - 1$ за прост број $p \geq 7$ [1.25 + 0.5 бодова].

Приметимо да је $p^2 \equiv \pm 1 \pmod{5}$ и $p^4 \equiv 1 \pmod{5}$, па $5 \nmid p^4 + p^2 + 1$ ни за један непаран прост број p . За бројеве $p^2 \equiv -1 \pmod{5}$ важи и $5 \nmid p^2 - 1$ [0.5 бодова].

Дакле, одговор је $2^3 \cdot 3^2 = 72$.

Коментар. Неки закључци су могли и брже да се изведу. На пример, Ојлерова теорема тврди да, уколико су a и m узајамно прости бројеви, важи $a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod{m}$, где је са $\varphi(m)$ означен број природних бројева мањих од m који су узајамно прости са m . Како је $\varphi(9) = 6$ (реч је о бројевима 1, 2, 4, 5, 7 и 8), то је $p^6 \equiv 1 \pmod{9}$.

4. Одредити све парове (a, b) реалних бројева таквих да систем једначина

$$\begin{cases} x + y = a, \\ xy - z^2 = b \end{cases}$$

има јединствено решење у скупу реалних бројева.

Напомена. Решења посматрамо као уређене тројке, нпр. $(5, 3, 0)$ и $(3, 5, 0)$ су различита решења.

Прво решење. Нека је (x, y, z) решење датог система. Тада је и $(x, y, -z)$ решење, јер прва једначина не зависи од z , а у другој се јавља само z^2 . Пошто систем треба да има јединствено решење, закључујемо да за то јединствено решење мора да важи $z = -z$, тј. $z = 0$. [1 бод]

Систем се сада своди на

$$\begin{cases} x + y = a, \\ xy = b. \end{cases}$$

Ако постоји неко решење система за које је $x \neq y$, онда су $(x, y, 0)$ и $(y, x, 0)$ два различита решења (обе једначине су симетричне). Зато у том јединственом решењу мора да важи $x = y$. [1 бод]

Из система $x + y = a, xy = b$ следи да су x и y корени квадратне једначине

$$t^2 - at + b = 0.$$

Како смо закључили да ако постоји јединствено решење за њега мора да важи $x = y$, знамо да почетни задатак може имати јединствено решење ако наведена квадратна једначина има двоструки корен, односно ако јој је дискриминанта нула:

$$\Delta = a^2 - 4b = 0 \iff b = \frac{a^2}{4}.$$

[1 бод]

Горње разматрање нам је дало да систем може имати јединствено решење у случају $\frac{a^2}{4} = b$. Морамо још показати да систем има јединствено решење у случају $\frac{a^2}{4} = b$ јер из горе наведеног разматрања то не следи директно.

Заиста, ако је $\frac{a^2}{4} = b$ систем постаје:

$$\begin{cases} x + y = a, \\ xy - z^2 = \frac{a^2}{4}. \end{cases}$$

За овакав систем можемо прво приметити да мора бити $z = 0$ јер је квадрат реалног броја увек ненегативан, а знамо да важи $(x + y)^2 \geq 4xy$ за све реалне бројеве x, y при чему једнакост у тој процени важи само за $x = y$. Одавде одмах следи да овај систем има јединствено решење $(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, 0)$. [2 бода]

НАПОМЕНА: Пажљиво око може приметити да горе наведено разматрање показује да систем има јединствено решење такво да је $z = 0$, али немамо гаранцију да систем са a и b таквим да је $\frac{a^2}{4} = b$ нема још

решења за неко $z \neq 0$. Због тога је неопходно проверити да систем заиста има јединствено решење када је $\frac{a^2}{4} = b$. То носи последња 2 бода у задатку, не јер је та провера сама по себи тешка, већ јер је важно да ученици покажу свест зашто је она неопходна. То се још боље види на приступу у решењу број 2.

Друго решење. Систем има јединствено решење ако и само ако једначина $x(a-x) - z^2 = b$ има јединствено решење по x и по z јер је тада y јединствено одређено релацијом $y = a - x$. [1 бод]

Ако ову једначину посматрамо као квадратну једначину по x , да би она имала јединствено решење потребно је да њена дискриминанта $D = a^2 - 4(b + z^2)$ буде једнака нули. Да би решење било јединствено не смеју постојати две различите вредности z које ово задовољавају па мора бити $z = 0$ [1 бод] и $\frac{a^2}{4} = b$. [1 бод]

Да систем у случају $\frac{a^2}{4} = b$ има јединствено решење проверавамо на исти начин као у првом решењу или тако што приметимо да је тада дискриминанта квадратне једначине по x једнака $-4z^2$ односно једначина ће имати реална решења по x само за $z = 0$ и то решење ће бити јединствено. [2 бода]

Задаци и решења - квалификације 2025 - информатика (Б)

1 Задаци који вреде 2 бода

1. Ученик из табеле Ucenik(id, ime, prezime) треба да буде приказан ако његово име почиње словом М. Који SQL упит ће вратити тачан резултат?

- (а) `SELECT * FROM Ucenik WHERE ime='M*';`
- (б) `SELECT * FROM Ucenik WHERE ime LIKE '%M';`
- (в) `SELECT * FROM Ucenik WHERE ime LIKE 'M%';`
- (г) `SELECT * FROM Ucenik WHERE ime STARTS WITH 'M';`

Тачан одговор: (в)

2. Ако се у рачунару за запис бројева користи 8 битова, од чега се први користи како би се одредио знак броја (0 ако је број позитиван, 1, ако је број негативан), а преосталих 7 за запис апсолутне вредности датог броја, који је највећи број који може бити записан?

Пример: 54 записујемо као 00110110, док -37 записујемо као 10100101

- (а) 2^7
- (б) 2^8
- (в) $2^7 - 1$
- (г) $2^8 - 1$

Тачан одговор: (в)

3. Који од следећих логичких израза је таутологија?

- (а) $p \Rightarrow (p \wedge q)$
- (б) $p \vee \neg p$
- (в) $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$
- (г) $\neg(p \wedge q)$

Тачан одговор: (б)

4. Израчунати резултат сабирања у бинарном систему:

$$101101_2 + 11011_2$$

- (а) 1001000_2
- (б) 1000000_2
- (в) 111000_2
- (г) 1010100_2

Тачан одговор: (а)

2 Задаци који вреде 3 бода

5. Шта се дешава ако у табели постоје два реда са истим примарним кључем?

- (а) База података прихвата оба реда без грешке
- (б) Добија се грешка и унос се не дозвољава
- (в) Први ред се брише, а други остаје
- (г) Променљива примарног кључа се аутоматски ажурира

Тачан одговор: (б)

6. Дат је израз $(A \wedge B) \vee (A \wedge \neg B)$. Који од понуђених израза је њему логички еквивалентан?

- (а) A
- (б) B
- (в) $\neg A$

(г) $A \vee B$

Тачан одговор: (а)

7. Шта исписује следећи код?

```
1 x = 5
2 y = 7
3 if x < y:
4     y = x
5 if x == y:
6     x = 10
7 else:
8     y = 6
9 print(x)
10 print(y)
```

(а) 7 7

(б) 5 6

(в) 7 6

(г) 10 5

Тачан одговор: (г)

8. Шта је испис у другој итерацији следеће петље?

```
1 #include <stdio.h>
2 #include <stdlib.h>
3
4 int main() {
5     int n;
6     int* a;
7
8     a = malloc(4 * sizeof(int));
9     a[0] = 1;
10    a[2] = 6;
11    a[1] = 9;
12    a[3] = 2;
13
14    for (int i = 0; i < 3; i += 2) {
15        printf("%d ", a[i / 2]);
16    }
17    return 0;
18 }
```

(а) 1

(б) 2

(в) 6

(г) 9

Тачан одговор: (г)

3 Задаци који вреде 5 бодова

За ове задатке треба дати кратко објашњење уз одговор.

9. Написати пример бесконачне петље.

Пример:

```
i ← 1
while (i > 0) do
    i ← i + 1
end while
```

10. Шта ће следећа функција, написана на програмском језику C, урадити са садржајем низа a дужине n ?

```
1 void f(int a[], int n){
2     int x = a[n - 1];
3     if (n > 1){
4         a[n - 1] = a[0];
5         f(a + 1, n - 2);
6         a[0] = x;
7     }
8 }
```

Тачан одговор: Редослед елемената низа ће бити обрнут.

11. Дата је логичка функција која зависи од променљивих a , b и c . Она је тачна када су све променљиве тачне или када је a нетачно. Написати помоћу логичких оператора функцију еквивалентну датој.

Тачан одговор: Функција је тачна у случају да су све променљиве тачне или да је променљива a нетачна, што се логички записује као

$$(\neg a) \vee (a \wedge b \wedge c).$$

12. Написати израз који одређује збир цифре стотина и десетица у броју n .

(Помоћ: користити целобројно дељење '/' и дељење по модулу '%')

Тачан одговор: Цифра стотина броја n добија се као $\lfloor n/100 \rfloor \bmod 10$, а цифра десетица као $\lfloor n/10 \rfloor \bmod 10$, па је тражени збир једнак

$$(\lfloor n/100 \rfloor \bmod 10) + (\lfloor n/10 \rfloor \bmod 10).$$

Ово се у програмском језику C/C++ може записати као $(n/100)\%10 + (n/10)\%10$.