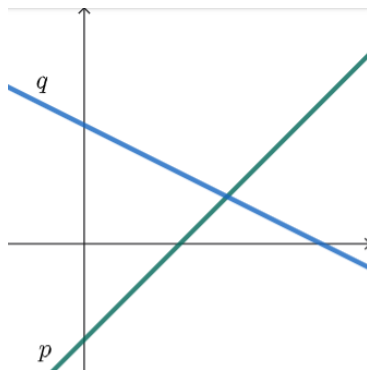


1 Задаци који вреде 2 бода

Тачан одговор носи 2 бода, нетачан одузима 0.5. Неодговорено – 0 бодова.

1. Праве p и q на слици задате су једначинама $y = ax + b$ и $y = cx + d$, редом. У ком од понуђених одговора су **обе** релације између бројева a , b , c и d тачне?



- А) $c > 0$, $c < a$
- Б) $a < c$, $c < b$
- В) $b < c$, $a < 0$
- Г) $b < 0$, $d > b$ - тачан одговор

Решење: Са слике видимо да права p има позитиван коефицијент правца, а права q негативан, односно $a > 0$ и $c < 0$. Бројеве b и d добијамо као пресеке правих p и q редом са y -осом, па је $b < 0$ и $d > 0$. На основу овог закључујемо да је Г) једини одговор где су обе релације тачне.

2. Комплексних бројева z таквих да важи једнакост $z|z|^2 = 16\bar{z}$ има:

- А) 1
- Б) 2
- В) 3 - тачан одговор
- Г) 4

Решење. Познато је да важи $|z|^2 = z\bar{z}$, што уврштавањем у дату једнакост даје

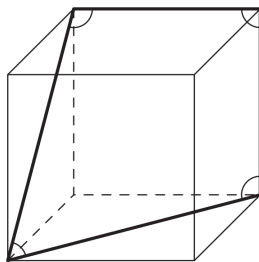
$$z \cdot (z\bar{z}) = 16\bar{z} \implies z^2\bar{z} = 16\bar{z}.$$

Пребацивањем на једну страну остаје

$$\bar{z}(z^2 - 16) = 0 \implies \bar{z}(z - 4)(z + 4) = 0$$

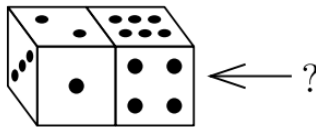
Дакле, решења су $z \in \{0, 4, -4\}$.

3. На слици испод је приказана коцка са четири означена угла. Збир означених углова је:



- А) 315° Б) 330° - тачан одговор В) 345° Г) 360° .

Решење. Углови су мере 60° (три дијагонале коцке граде једнакостранични троугао), 90° (дијагонални пресек коцке је правоугаоник), 90° (страна коцке је квадрат), 90° (дијагонални пресек коцке је правоугаоник), па је њихов збир 330° .



4. За стандардну коцкицу важи да је збир бројева тачкица на супротним странама једнак 7. Две **идентичне** стандардне коцкице су приказане на слици. Колико тачкица може бити на (невидљивој) страни десно означеној знаком питања?

- А) само 5 - тачан одговор
- Б) само 2
- В) 2 или 5
- Г) 2 или 3 или 5

Решење: На основу коцкице лево, закључујемо да се на странама суседним страни на којој је број 1 редом налазе бројеви 2, 3, 5, 4 (у смеру супротном од смера казальке на сату). Страна са бројем 1 је доња страна коцкице десно, што значи да се на страни означеној знаком питања налази број 5.

2 Задаци који вреде 3 бода

У наредним задацима треба уписати само коначно решење (број).

1. Одредити максималну вредност израза $|2x^2 - 9x + 7|$ на затвореном интервалу $x \in [0, 3]$.
Решење. Посматрајмо функцију $f(x) = 2x^2 - 9x + 7$. Пошто је f квадратна функција са позитивним коефицијентом уз x^2 , она има минимум у тачки $x = -\frac{-9}{2 \cdot 2} = \frac{9}{4}$, која припада интервалу $[0, 3]$. Израчунајмо вредности функције у темену и на крајевима интервала: $f(0) = 7$, $f(3) = 2 \cdot 9 - 27 + 7 = -2$, $f\left(\frac{9}{4}\right) = 2 \cdot \frac{81}{16} - 9 \cdot \frac{9}{4} + 7 = -\frac{25}{8}$.
 Дакле, на интервалу $[0, 3]$ важи $\min f(x) = -\frac{25}{8}$ и $\max f(x) = 7$. Следи да је $\max_{x \in [0, 3]} |2x^2 - 9x + 7| = \max \left\{ 7, \frac{25}{8} \right\} = 7$.
2. Колико износи збир свих вредности x за које важи једнакост

$$2^x = 2x - 4 + 2^{3x-4} \quad ?$$

Прво решење. Приметимо да је једначина еквивалентна са $x + 2^x = 3x - 4 + 2^{3x-4}$, која је еквивалентна са $f(x) = f(3x - 4)$, где је $f(t) = t + 2^t$. Како је f строго растућа функција на $\mathbb{R}$ (као збир две растуће), то је она и инјективна. Дакле, мора да важи $x = 3x - 4$, тј. једино решење једначине је $x = 2$.

Друго решење. Уочимо функцију $f(x) = 2^{3x-4} + 2x - 4 - 2^x$. Она је непрекидна на $\mathbb{R}$, а важи и

$$f'(x) = 3 \ln 2 \cdot 2^{3x-4} + 2 - \ln 2 \cdot 2^x = \ln 2 (3 \cdot 2^{3x-4} - 2^x) + 2 = \ln 2 \cdot 2^x (3 \cdot 2^{2x-4} - 1) + 2.$$

Имамо да је $\ln 2 > 0$ и $2^x > 0$ за све $x \in \mathbb{R}$. Размотримо два случаја:

- 1° $x \geq \frac{3}{2}$. Тада је $3 \cdot 2^{2x-4} - 1 \geq 3 \cdot 2^{-1} - 1 = \frac{1}{2}$. Дакле, $f'(x) > 2 > 0$.
- 2° $x < \frac{3}{2}$. Докажимо да је $\ln 2 \cdot 2^x (3 \cdot 2^{2x-4} - 1) > -2$. Како је $3 \cdot 2^{2x-4} - 1 > -1$, довољно је доказати да је $\ln 2 \cdot 2^x < 2$, тј. $\ln 2 \cdot 2^{x-1} < 1$, а за то је довољно доказати $\ln 2 \cdot \sqrt{2} < 1$.
 Познато је да је $\sqrt{2} \approx 1.41$, па је смислено користити оцену $\sqrt{2} < \frac{10}{7}$ (она је тачна јер је еквивалентна са $2 < \frac{100}{49}$, што јесте тачно). Слично, $\ln 2 < \frac{7}{10} \iff 2^{10} < e^7$, а ово се непосредно проверава да јесте тачно ($2^{10} = 1024 < 2.7^7 < e^7$). Дакле, $f'(x) > 0$.

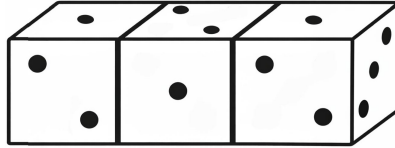
Дакле, f је строго растућа на $\mathbb{R}$, па може имати највише један пресек са x -осом. Како је $f(2) = 0$, то је $x = 2$ једино решење полазне једначине.

3. Колико има парова природних бројева (m, n) , $m \leq n$ за које је $\text{НЗД}(m, n) = 12$ и $\text{НЗС}(m, n) = 7560$?

Решење. Услов $\text{НЗД}(m, n)$ можемо записати као $m = 12a$ и $n = 12b$, где важи $\text{НЗД}(a, b) = 1$. Сада је $7560 = \text{НЗС}(12a, 12b) = 12 \cdot \text{НЗС}(a, b) = 12ab$, одакле имамо $ab = 630 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$. Како бисмо испунили услов $\text{НЗД}(a, b) = 1$, неопходно је да сва четири степена простих бројева која улазе у факторизацију броја 630 у целости улазе у факторизацију или броја a или броја b . Ово је еквивалентно подели скупа $\{2, 3, 5, 7\}$ на два дисјунктна подскупа чија је унија цео почетни скуп, а знамо да оваквих подела има $2^4 = 16$. Међутим, овако добијамо и пар (m, n) и пар (n, m) . Због услова $m \leq n$ тачно један од ових парова је решење, па је број тражених парова једнак 8.

Коментар. Овде не може да важи $m = n$, па је услов $m \leq n$ еквивалентан услову $m < n$. Када би важила једнакост, било би $\text{НЗД}(m, n) = \text{НЗС}(m, n)$, што није случај. Због тога не могу оба пара $(m, n), (n, m)$ да испуњавају услове задатка.

4. Три идентичне коцкице за игру (збир бројева тачкица на супротним странама једнак 7) сложене су једна уз другу (формирајући квадар) тако да се **стране које се додирују имају исти број тачкица**. На пример, могуће је, на горњим странама, добити троцифрени број 121 (видети слику). Колико укупно различитих троцифрених бројева (читано слева надесно) се може добити на горњим странама коцкица, ако се оне слажу на овај начин?

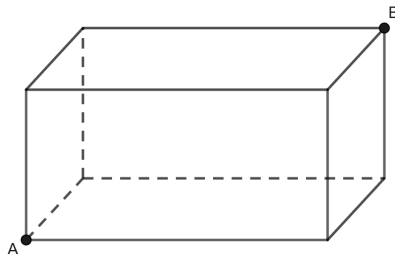


Решење: Поделимо бројеве у три групе: $\{1, 6\}, \{2, 5\}, \{3, 4\}$ - бројеви на супротним странама коцкице су у истој групи. Јасно је да сви троцифрени бројеви који могу да се добију имају цифре у скупу $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, па има $6^3 = 216$ могућих бројева. Посматрамо сада такве бројеве. Имамо два случаја: када су неке две цифре у истој групи и када су све три цифре у различитим групама. У првом случају постоји нека група која не садржи ниједну цифру тог броја. То значи да можемо да поставимо све три коцкице тако да су одговарајуће цифре на горњим странама, а на странама које се додирују су бројеви из те групе. Дакле, сви такви бројеви могу да се добију. Прелазимо на други случај. Како год да поставимо средњу коцкицу, постојаће група која не садржи ниједну цифру добијеног броја (то ће бити управо она група коју чине бројеви који су на странама које се додирују). То значи да ниједан број у другом случају не може да се добије. Таквих бројева има $6 \cdot 4 \cdot 2 = 48$ (прва цифра се бира произвољно, друга из неке од преосталих група, а трећа из последње групе). Коначно добијамо да тражених бројева има $216 - 48 = 168$.

3 Задаци који вреде 5 бодова

Приказати (откупати) поступак у наредним задацима.

1. Мрав се налази код темена A квадрa са слике и жели да дође до темена B . Ако су дужине ивица квадрa 2, 1 и 1, а мрав може да се креће по омотачу квадрa (дакле, не само по ивицама), колики је најкраћи пут који мрав мора да пређе? Одговор образложити!



Решење: Посматрамо мрежу квадрa са слике доле [1 бод]. Како мрав може да се креће само по омотачу квадрa, најкраћи пут од тачке A до тачке B је најкраћи пут од тачке са мреже која одговара тачки A (на мрежи је то само тачка означена са A) до тачке са мреже која одговара тачки B (на мрежи су то тачке означене са B_1 и B_2) [2 бода]. Дакле, потребно је само израчунати дужине дужи AB_1 и AB_2 . Из Питагорине теореме се добија $AB_1 = \sqrt{10}$ и $AB_2 = 2\sqrt{2}$ [1 бод], па је најкраћи пут који мрав мора да пређе једнак $2\sqrt{2}$ [1 бод].

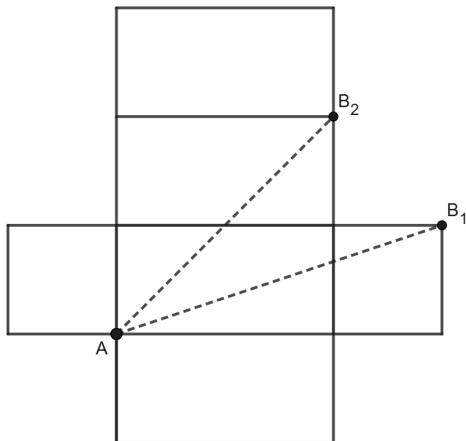
2. На табли су написани бројеви $1, 2, 3, \dots, 2025$. Сваке секунде се са табле бришу два броја (означимо их са a и b), а дописује се број $ab + a + b$. Који број ће бити написан на табли након 2024 секунде?

Решење: Нека су након k секунди на табли написани бројеви $a_1, a_2, \dots, a_{2025-k}$, а након $k + 1$ секунде бројеви $b_1, b_2, \dots, b_{2024-k}$. Без умањења општости можемо да претпоставимо да је $b_1 = a_1 a_2 + a_1 + a_2$ и $b_2 = a_3, b_3 = a_4, \dots, b_{2024-k} = a_{2025-k}$. Како је $b_1 + 1 = (a_1 + 1)(a_2 + 1)$ [1 бод], имамо да је $(a_1 + 1)(a_2 + 1) \dots (a_{2025-k} + 1) = (b_1 + 1)(b_2 + 1) \dots (b_{2024-k} + 1)$ [1 бод]. Дакле, производ свих бројева на табли увећаних за 1 је исти у сваком тренутку. [1 бод]

На почетку је тај производ једнак 2026! [1 бод], док је након 2024 секунде једнак $N + 1$, где је N тражени број. Сада је јасно да је $N = 2026! - 1$. [1 бод]

3. Одредити највећи природан број n такав да $n \mid p^6 - 1$ за све просте бројеве $p > 7$.

Решење. Приметимо да важи $p^6 - 1 = (p^2 - 1)(p^4 + p^2 + 1) = (p - 1)(p + 1)(p^4 + p^2 + 1)$. Овај израз није



дељив са p , где је p прост број. Дакле, треба наћи највеће степене бројева 2, 3, 5 и 7 који деле $p^6 - 1$ за сваки прост број $p > 7$ [1 бод].

Приметимо да $8 \mid (p-1)(p+1)$ за сваки прост број $p > 7$, а да је број $p^4 + p^2 + 1$ непаран. Такође, $16 \nmid (p-1) \cdot (p+1)$ нпр. за $p = 11$. [0.9 + 0.33 бодова]

Слично, $3 \mid (p^2 - 1)$ и $3 \mid (p^4 + p^2 + 1)$ за сваки прост број $p > 7$ (јер $p^2 \equiv 1 \pmod{3}$). Такође, нпр. за $p = 11$ имамо $9 \nmid (11^2 - 1)$, као и $11^4 + 11^2 + 1 \equiv 2^4 + 2^2 + 1 \equiv 21 \pmod{9}$. Дакле, 3^2 је највећи степен тројке који дели $p^6 - 1$ за прост број $p > 7$. [0.9 + 0.33 бодова]

Приметимо да је $p^2 \equiv \pm 1 \pmod{5}$ и $p^4 \equiv 1 \pmod{5}$, па $5 \nmid p^4 + p^2 + 1$ ни за један непаран прост број p . За бројеве $p^2 \equiv -1 \pmod{5}$ важи и $5 \nmid p^2 - 1$. [0.33 бодова]

Број p^2 може да даје остатке 0, 1, 2 и 4 при дељењу са 7, одакле добијамо $p^6 \equiv 1 \pmod{7}$ за сваки прост број $p > 7$. За $p = 13$ важи $7 \mid (13-1) \cdot (13+1)$ и $49 \nmid (13-1) \cdot (13+1)$, као и $13^4 + 13^2 + 1 \equiv (-1)^4 + (-1)^2 + 1 \equiv 3 \pmod{7}$. Зато је 7^1 највећи степен броја 7 који дели $p^6 - 1$ за све просте бројеве $p > 7$. [0.9 + 0.33 бодова]
Дакле, одговор је $2^3 \cdot 3^2 \cdot 7 = 504$.

Напомена. Укупан број бодова не може бити већи од 5.

Коментар. Неки закључци су могли и брже да се изведу. На пример, Ојлерова теорема тврди да, уколико су a и m узајамно прости бројеви, важи $a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod{m}$, где је са $\varphi(m)$ означен број природних бројева мањих од m који су узајамно прости са m . Како је $\varphi(7) = 6$ и $\varphi(9) = 6$, то је $p^6 \equiv 1 \pmod{7}$ и $p^6 \equiv 1 \pmod{9}$.

4. Одредити све парове (a, b) реалних бројева таквих да систем једначина

$$\begin{cases} x + y = a, \\ xy - z^2 = b \end{cases}$$

има јединствено решење у скупу реалних бројева.

Напомена. Решења посматрамо као уређене тројке, нпр. $(5, 3, 0)$ и $(3, 5, 0)$ су различита решења.

Прво решење. Нека је (x, y, z) решење датог система. Тада је и $(x, y, -z)$ решење, јер прва једначина не зависи од z , а у другој се јавља само z^2 . Пошто систем треба да има јединствено решење, закључујемо да за то јединствено решење мора да важи $z = -z$, тј. $z = 0$. [1 бод]

Систем се сада своди на

$$\begin{cases} x + y = a, \\ xy = b. \end{cases}$$

Ако постоји неко решење система за које је $x \neq y$, онда су $(x, y, 0)$ и $(y, x, 0)$ два различита решења (обе једначине су симетричне). Зато у том јединственом решењу мора да важи $x = y$. [1 бод]

Из система $x + y = a, xy = b$ следи да су x и y корени квадратне једначине

$$t^2 - at + b = 0.$$

Како смо закључили да ако постоји јединствено решење за њега мора да важи $x = y$, знамо да почетни задатак може имати јединствено решење ако наведена квадратна једначина има двоструки корен, односно ако јој је дискриминанта нула:

$$\Delta = a^2 - 4b = 0 \iff b = \frac{a^2}{4}.$$

[1 бод]

Горње разматрање нам је дало да систем може имати јединствено решење у случају $\frac{a^2}{4} = b$. Морамо још показати да систем има јединствено решење у случају $\frac{a^2}{4} = b$ јер из горе наведеног разматрања то не следи директно.

Заиста, ако је $\frac{a^2}{4} = b$ систем постаје:

$$\begin{cases} x + y = a, \\ xy - z^2 = \frac{a^2}{4}. \end{cases}$$

За овакав систем можемо прво приметити да мора бити $z = 0$ јер је квадрат реалног броја увек ненегативан, а знамо да важи $(x + y)^2 \geq 4xy$ за све реалне бројеве x, y при чему једнакост у тој процени важи само за $x = y$. Одавде одмах следи да овај систем има јединствено решење $(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, 0)$. **[2 бода]**

НАПОМЕНА: Пажљиво око може приметити да горе наведено разматрање показује да систем има јединствено решење такво да је $z = 0$, али немамо гаранцију да систем са a и b таквим да је $\frac{a^2}{4} = b$ нема још решења за неко $z \neq 0$. Због тога је неопходно проверити да систем заиста има јединствено решење када је $\frac{a^2}{4} = b$. То носи последња 2 бода у задатку, не јер је та провера сама по себи тешка, већ јер је важно да ученици покажу свест зашто је она неопходна. То се још боље види на приступу у решењу број 2.

Друго решење. Систем има јединствено решење ако и само ако једначина $x(a - x) - z^2 = b$ има јединствено решење по x и по z јер је тада y јединствено одређено релацијом $y = a - x$. **[1 бод]**

Ако ову једначину посматрамо као квадратну једначину по x , да би она имала јединствено решење потребно је да њена дискриминанта $D = a^2 - 4(b + z^2)$ буде једнака нули. Да би решење било јединствено не смеју постојати две различите вредности z које ово задовољавају па мора бити $z = 0$ **[1 бод]** и $\frac{a^2}{4} = b$. **[1 бод]**

Да систем у случају $\frac{a^2}{4} = b$ има јединствено решење проверавамо на исти начин као у првом решењу или тако што приметимо да је тада дискриминанта квадратне једначине по x једнака $-4z^2$ односно једначина ће имати реална решења по x само за $z = 0$ и то решење ће бити јединствено. **[2 бода]**

Задаци и решења - квалификације 2025 - информатика (А)

1 Задаци који вреде 2 бода

1. Ученик из табеле Ucenik(id, ime, prezime) треба да буде приказан ако његово име почиње словом М. Који SQL упит ће вратити тачан резултат?

- (а) `SELECT * FROM Ucenik WHERE ime='M*';`
- (б) `SELECT * FROM Ucenik WHERE ime LIKE '%M';`
- (в) `SELECT * FROM Ucenik WHERE ime LIKE 'M%';`
- (г) `SELECT * FROM Ucenik WHERE ime STARTS WITH 'M';`

Тачан одговор: (в)

2. Ако се у рачунару за запис бројева користи 8 битова, од чега се први користи како би се одредио знак броја (0 ако је број позитиван, 1, ако је број негативан), а преосталих 7 за запис апсолутне вредности датог броја, који је највећи број који може бити записан?

Пример: 54 записујемо као 00110110, док -37 записујемо као 10100101

- (а) 2^7
- (б) 2^8
- (в) $2^7 - 1$
- (г) $2^8 - 1$

Тачан одговор: (в)

3. Које две бинарне цифре недостају у следећем броју ако знамо да број треба да буде **паран** и да укупна сума свих битова (број јединица) треба да буде **непарна**?

1010 **

- (а) 00
- (б) 01
- (в) 10
- (г) 11

Тачан одговор: (в)

4. Шта је испис у другој итерацији следеће петље?

```
1 #include <stdio.h>
2 #include <stdlib.h>
3
4 int main() {
5     int n;
6     int* a;
7
8     a = malloc(4 * sizeof(int));
9     a[0] = 1;
10    a[2] = 6;
11    a[1] = 9;
12    a[3] = 2;
13
14    for (int i = 0; i < 3; i += 2) {
15        printf("%d ", a[i / 2]);
16    }
17    return 0;
18 }
```

- (а) 1
- (б) 2
- (в) 6
- (г) 9

Тачан одговор: (г)

2 Задаци који вреде 3 бода

5. Који је редослед корака приликом типичног превођења C/C++ програма на машински језик?

- (а) претпроцесирање $\rightarrow$ компилација $\rightarrow$ асемблирање $\rightarrow$ линковање
- (б) претпроцесирање $\rightarrow$ линковање $\rightarrow$ асемблирање $\rightarrow$ компилација
- (в) линковање $\rightarrow$ претпроцесирање $\rightarrow$ компилација $\rightarrow$ линковање
- (г) асемблирање $\rightarrow$ линковање $\rightarrow$ претпроцесирање $\rightarrow$ компилација

Тачан одговор: (а)

6. Израчунати временску сложеност следећег C++ кода у зависности од n :

```
1 for(int i = 2; i <= n; i++)
2 {
3     int j = n - i;
4     for(; j <= n; i++) j += 2;
5 }
```

- (а) $O(n^2)$
- (б) $O(n \log n)$
- (в) $O(n\sqrt{n})$
- (г) $O(n)$

Тачан одговор: (г)

7. Шта ће следећа функција, написана на програмском језику C, урадити са садржајем низа a дужине n ?

```
1 void f(int a[], int n){
2     int x = a[n - 1];
3     if (n > 1){
4         a[n - 1] = a[0];
5         f(a + 1, n - 2);
6         a[0] = x;
7     }
8 }
```

- (а) Из низа ће избацити сваки други елемент
- (б) Елементи низа ће бити обрнути два пута (остаће у почетном поретку)
- (в) Замениће само први и последњи елемент
- (г) Редослед елемената низа ће бити обрнут

Тачан одговор: (г)

8. Шта исписује следећи C++ код?

```
1 int j = 1;
2 for(int i = 1; i < 5; i++)
3 {
4     if(j = 1) cout << i << " ";
5     j++;
6 }
7 cout << j;
```

- (а) 1 5
- (б) 1 2 3 4 2
- (в) 1 2 3 4 5
- (г) 1 2

Тачан одговор: (б)

3 Задаци који вреде 5 бодова

За ове задатке треба дати кратко објашњење уз одговор.

9. Написати пример бесконачне петље.

Пример:

```
i ← 1
while (i > 0) do
    i ← i + 1
end while
```

10. Ако су променљиве i и j типа `int` (цели бројеви) одредити њихову вредност након наредби:

```
1 i = 2; j = 5;
2 switch(j/i)
3 {
4     case 1: i++; break;
5     case 2: i += ++j;
6     default: j += ++i;
7 }
```

Тачан одговор: Пошто је $j/i = 5/2 = 2$ при целобројном дељењу, извршава се грана `case 2`. Због изостанка `break` наредбе, након тога се извршава и `default` грана. После свих инкрементирања и сабирања се добија $i = 9$ и $j = 15$.

11. Дата је логичка функција која зависи од променљивих a , b и c . Она је тачна када су све променљиве тачне или када је a нетачно. Написати помоћу логичких оператора функцију еквивалентну датој.

Тачан одговор: Функција је тачна у случају да су све променљиве тачне или да је променљива a нетачна, што се логички записује као

$$(\neg a) \vee (a \wedge b \wedge c).$$

12. Написати израз који одређује збир цифре стотина и десетица у броју n .

(Помоћ: користити целобројно дељење `'/'` и дељење по модулу `'%'`)

Тачан одговор: Цифра стотина броја n добија се као $\lfloor n/100 \rfloor \bmod 10$, а цифра десетица као $\lfloor n/10 \rfloor \bmod 10$, па је тражени збир једнак

$$(\lfloor n/100 \rfloor \bmod 10) + (\lfloor n/10 \rfloor \bmod 10).$$

Ово се у програмском језику C/C++ може записати као `(n/100)%10 + (n/10)%10`.